Chapitre 1 : Logique et raisonnement mathématique

Table des matières

Le but de ce chapitre est d'apprendre à raisonner. L'objectif est double :
- comprendre les énoncés (logique)
- construire des démonstrations cohérentes (méthodes et modes de raisonnement)

1 Logique élémentaire

1.1 Valeur de vérité

En logique, on s'intéresse à la valeur de vérité de certains énoncés ou propriétés.
Cette valeur de vérité peut être soit « vrai » (V), soit « faux » (F), mais pas les deux en même temps.
Elle peut parfois dépendre du contexte (variables).

Exemples 1.1 :
- « $1 + 1 = 2$ » est ...
- « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ » est ...
- « $x^2 = 1$ » est ...

1.2 Négation

Définition 1.2 (négation d'un énoncé)

La négation d'un énoncé A, notée « non A », est l'énoncé dont la valeur de vérité est contraire à celle de A.

A	V	F
non A		

Exemples 1.3 :
- « non $\left(\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\right)$ » s'écrit plus simplement ...
- « non $(x = 1)$ » s'écrit plus simplement ...
- « non $(x \leqslant 1)$ » s'écrit plus simplement ...

Remarque : L'énoncé « non (non A) » a la même signification que A (on dit que la négation est une involution).

1.3 Équivalence

Définition 1.4 (équivalence de deux énoncés)

L'équivalence de deux énoncés A et B est l'énoncé, noté « $A \iff B$ », dont la valeur de vérité est « vrai » si A et B possèdent la même valeur de vérité, et « faux » sinon.

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \iff B$				

Lorsque $A \iff B$ est vrai, on dit que les énoncés A et B sont équivalents.

Exemples 1.5 :
- « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \iff 1 + 1 = 2$ » est ...
- « $2 + 2 = 5 \iff 2 + 2 = 6$ » est ...
- « $2x + 1 = 7 \iff x = 3$ » est ...

Rédaction : Lorsque l'on écrit $A \iff B$, cela ne signifie pas forcément que A et B sont des énoncés vrais : en effet, A et B sont soit tous les deux vrais, soit tous les deux faux.
Pour dire : « on sait que A est vrai, A et B sont équivalents, donc B aussi est vrai », on utilisera la locution « c'est-à-dire » ou l'abréviation *i.e.* (pour *id est*) : « A *i.e.* B ».

Remarques :
- Si « $A \iff B$ » et « $B \iff C$ » sont vraies, alors on a aussi « $A \iff C$ » (transitivité de l'équivalence). On écrit alors $A \iff B \iff C$.
- L'énoncé « $A \iff B$ » équivaut à « non $A \iff$ non B ».

1.4 Conjonction (et)

Définition 1.6 (conjonction de deux énoncés)

La conjonction de deux énoncés A et B est l'énoncé, noté « A et B », dont la valeur de vérité est « vrai » si A et B sont tous les deux vrais, et « faux » dans les autres cas.

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
A et B				

Exemples 1.7 :
- « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ et $1 + 1 = 2$ » est ...
- « $x > 0$ et $x \leqslant 1$ » s'écrit de manière abrégée ...

Proposition 1.8 (associativité de la conjonction)

Soient A, B et C trois énoncés.
L'énoncé « (A et B) et C » est équivalent à « A et (B et C) ».
On peut donc écrire ces énoncés sans parenthèses : « A et B et C ».

Cela se généralise à plus de trois énoncés.

1.5 Disjonction (ou)

Définition 1.9 (disjonction de deux énoncés)

La disjonction de deux énoncés A et B est l'énoncé, noté « A ou B », dont la valeur de vérité est « vrai » si au moins l'un des deux énoncés A ou B est vrai, et « faux » sinon.

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
A ou B				

On dit que le « ou », en mathématiques, est inclusif.

Exemples 1.10 :
- « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ou $1 + 1 = 2$ » est ...
- « $x > 0$ ou $x \leqslant 1$ » est ...

Proposition 1.11 (associativité de la disjonction)

Soient A, B et C trois énoncés.
L'énoncé « $(A$ ou $B)$ ou C » est équivalent à « A ou $(B$ ou $C)$ ».
On peut donc écrire ces énoncés sans parenthèses : « A ou B ou C ».

Proposition 1.12 (distributivité)

Soient A, B et C trois énoncés. On a les équivalences suivantes :

1. A et $(B$ ou $C) \iff (A$ et $B)$ ou $(A$ et $C)$ (distributivité de « et » sur « ou »)
2. A ou $(B$ et $C) \iff (A$ ou $B)$ et $(A$ ou $C)$ (distributivité de « ou » sur « et »)

Proposition 1.13 (négation d'une conjonction, d'une disjonction)

Soient A et B deux énoncés. On a les équivalences suivantes :

$$\text{non } (A \text{ et } B) \iff (\text{non } A \text{ ou non } B) \ ; \qquad \text{non } (A \text{ ou } B) \iff (\text{non } A \text{ et non } B)$$

Exemple 1.14 : « non $(0 < x \leqslant 1)$ » est équivalent à ...

1.6 Implication

Définition 1.15 (implication logique)

Si A et B sont deux énoncés, on note « $A \Longrightarrow B$ » (lire « A implique B ») l'énoncé « (non A) ou B ».

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \Longrightarrow B$				

Dire que l'énoncé $A \Longrightarrow B$ est vrai signifie que :
- si A est vrai, alors B doit être vrai également ;
- si A est faux, alors B peut être indifféremment vrai ou faux.

Exemples 1.16 :
- « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow 3 + 9 = 12$ » est ...
- « $3 + 9 = 12 \Longrightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ » est ...
- « $\pi \in \mathbb{Q} \Longrightarrow 2 + 2 = 5$ » est ...
- « $2 + 2 = 5 \Longrightarrow \pi \in \mathbb{Q}$ » est ...

Méthode 1 : *Pour démontrer « $A \Longrightarrow B$ », on suppose que A est vraie, et on démontre que B est vraie.*

Exemple 1.17 : Soit n un entier naturel. Montrer que : n pair $\Longrightarrow n^2$ pair

Rédaction : Ne pas confondre le symbole $\Longrightarrow$ avec un « donc » :
- Lorsqu'on écrit $A \Longrightarrow B$, cela signifie seulement que « si A est vrai, alors B est vrai », mais cela ne signifie pas forcément que A et B sont des énoncés vrais.
- « A donc B » signifie que A est vrai ainsi que « $A \Longrightarrow B$ », et que par conséquent on peut en déduire que B est vrai également.

Remarque : Si « $A \implies B$ » et « $B \implies C$ » sont vraies, alors on a aussi « $A \implies C$ » (transitivité de l'implication). On écrit alors $A \implies B \implies C$.

Proposition 1.18 (négation d'un implication)

Soient A et B deux énoncés. La négation de « $A \implies B$ » est « A et non B ».

Méthode 2 : *Pour montrer que « $A \implies B$ » est faux, on montre que A est vrai et que B est faux.*

Proposition 1.19 (contraposée)

Soient A et B deux énoncés.
L'énoncé « $A \implies B$ » est équivalent à « non $B \implies$ non A ».
On dit que « non $B \implies$ non A » est la contraposée de « $A \implies B$ ».
Une implication et sa contraposée sont donc logiquement équivalentes.

Méthode 3 (raisonnement par contraposition) : *Pour démontrer « $A \implies B$ », on peut supposer que B est faux, et démontrer que A est faux.*

Exemple 1.20 : Soit n un entier naturel. Montrer que : n^2 pair $\implies n$ pair.

Proposition 1.21 (implications directe et réciproque)

Soient A et B deux énoncés.
L'énoncé « $A \iff B$ » est équivalent à « $(A \implies B)$ et $(B \implies A)$ ».
On dit que « $A \implies B$ » est l'implication directe et « $B \implies A$ » est l'implication réciproque.
Elles ne sont pas logiquement équivalentes.

Remarque : Ne pas confondre l'implication réciproque « $B \implies A$ » et la contraposée « non $B \implies$ non A » : elles ne sont pas logiquement équivalentes.

Exemple 1.22 :
Le théorème de Pythagore exprime une implication : si ABC est une triangle rectangle en A, alors on a l'égalité $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
La réciproque du théorème de Pythagore exprime l'implication réciproque : si A, B et C sont trois points tels que $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.
Le théorème de Pythagore et sa réciproque expriment donc l'équivalence entre les propriétés « le triangle ABC est rectangle en A » et « $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ».

Méthode 4 : *En général, pour démontrer une équivalence « $A \iff B$ », on démontre séparément chacune des deux implications directe ($A \implies B$) et réciproque ($B \implies A$).*
De manière équivalente, on peut aussi démontrer « $A \implies B$ » et « non $A \implies$ non B » (contraposée de l'implication réciproque).

Exemple 1.23 : Nous avons démontré séparément chacune des deux implications « n pair $\implies n^2$ pair » et « n^2 pair $\implies n$ pair ». Nous avons donc démontré l'équivalence : n pair $\iff n^2$ pair.

Définition 1.24 (conditions nécessaires et conditions suffisantes)

Soit A un énoncé.

1. Une condition nécessaire pour A est une propriété B telle que $A \Longrightarrow B$.
2. Une condition suffisante pour A est une propriété B telle que $B \Longrightarrow A$.
3. Une condition nécessaire et suffisante pour A est une propriété B qui est une condition à la fois nécessaire et suffisante pour A, c'est-à-dire telle que $A \Longleftrightarrow B$.

2 Quantificateurs

Les quantificateurs servent à introduire les variables présentes dans un énoncé tel que « $x^2 \geqslant y$ ».

2.1 Quantificateur universel $\forall$

« $\forall x \in E, \ \dots$ » se lit « pour tout x appartenant à E, ... », ou « quel que soit x appartenant à E, ... ».

Exemples 2.1 :
- « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1$ » est ....
- « $\forall x \in \mathbb{C}, x^2 \neq -1$ » est ....
- « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq y$ » est un énoncé qui dépend de la variable réelle y.
  En revanche, il ne dépend pas de la variable x qui est muette, car il peut aussi s'écrire « $\forall z \in \mathbb{R}, z^2 \neq y$ ».
  Sa valeur de vérité dépend de la valeur de la variable y : ...

Méthode 5 : *Pour démontrer une propriété avec un quantificateur universel du type « $\forall x \in E, P(x)$ », on fixe un élément x quelconque dans E (« soit $x \in E$ »), et on démontre $P(x)$.*

Exemple 2.2 : Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1$.

2.2 Quantificateur existentiel $\exists$

« $\exists x \in E, \ \dots$ » se lit « il existe (au moins un) x appartenant à E tel que ... ».

Exemples 2.3 :
- « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$ » est ...
- « $\exists x \in \mathbb{C}, x^2 = -1$ » est ...
- « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = y$ » est un énoncé qui dépend de la variable réelle y ; la variable x est muette.
  Cet énoncé est ...

Méthode 6 : *Pour démontrer une propriété avec un quantificateur existentiel du type « $\exists x \in E, P(x)$ », il suffit d'exhiber (au moins) un élément x de E qui possède la propriété attendue (***un exemple suffit***).*

Exemple 2.4 : Démontrer : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 9$.

Symbole $\exists!$
On note « $\exists! x \in E, P(x)$ » pour dire « il existe un unique $x \in E$ vérifiant $P(x)$ ».
C'est un raccourci pour « $\exists x \in E, \ [P(x) \text{ et } (\forall y \in E, P(y) \Longrightarrow y = x)]$ ».

Exemple 2.5 : Montrer la proposition suivante : $\exists! x \in \mathbb{R}, 2x - 3 = 4$.

2.3 Enchaînement de quantificateurs

Règle :
- Lorsque deux quantificateurs identiques se suivent, on peut inverser leur ordre.
- Lorsque deux quantificateurs différents se suivent, on ne peut pas inverser leur ordre.

Exemples 2.6 :

- « $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y = y + x^2$ » est équivalent à « $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + y = y + x^2$ ».
  On écrit aussi : « $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y = y + x^2$ ».
- « $\exists x \in \mathbb{R}_+$, $\exists y \in \mathbb{R}_+$, $x = y^2$ » est équivalent à « $\exists y \in \mathbb{R}_+$, $\exists x \in \mathbb{R}_+$, $x = y^2$ ».
  On écrit aussi : « $\exists x,y \in \mathbb{R}_+$, $x = y^2$ ».
- « $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\exists y \in \mathbb{R}_+$, $x = y^2$ » n'est pas équivalent à « $\exists y \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x = y^2$ ».

Traduction de propriétés sur les fonctions : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. « f admet un maximum en -1 » s'écrit : ...
2. « f admet un maximum » s'écrit : ...
3. « f est majorée par 12 » s'écrit : ...
4. « f est majorée » s'écrit : ...
5. « f est constante » s'écrit : ...
6. « f est croissante » s'écrit : ...
7. « f est strictement croissante » s'écrit : ...

2.4 Négation d'un quantificateur

Proposition 2.7 (négation de propriétés avec des quantificateurs)

Soit une propriété P qui dépend d'une variable x à valeurs dans un ensemble E.

1. non $(\forall x \in E,\ P(x)) \iff \exists x \in E$, non $P(x)$
2. non $(\exists x \in E,\ P(x)) \iff \forall x \in E$, non $P(x)$

Exemples 2.8 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. « f n'admet pas de maximum en -1 » s'écrit : ...
2. « f n'admet pas de maximum » s'écrit : ...
3. « f n'est pas majorée par 12 » s'écrit : ...
4. « f n'est pas majorée » s'écrit : ...
5. « f n'est pas constante » s'écrit : ...
6. « f n'est pas croissante » s'écrit : ...
7. « f n'est pas strictement croissante » s'écrit : ...

Méthode 7 : *Pour démontrer qu'une propriété du type « $\forall x \in E$, $P(x)$ » est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire un élément x de E tel que $P(x)$ est fausse.*

Exemple 2.9 : Montrer que « $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ » est fausse.

Méthode 8 : *Pour démontrer qu'une propriété du type « $\exists x \in E$, $P(x)$ » est fausse, on démontre que pour tout x dans E, $P(x)$ est fausse.*

Exemple 2.10 : Montrer que « $\exists n \in \mathbb{N}$, $2n + 1 = 0$ » est fausse.

Mises en garde de rédaction : Les quantificateurs servent uniquement à écrire des énoncés de manière condensée, mais ne doivent pas être utilisés en guise d'abréviations à l'intérieur d'un raisonnement.
De manière générale, on prendra garde de ne pas écrire de symbole logique ou mathématique en guise d'abréviation au milieu d'une phrase en français.

3 Autres modes de raisonnement classiques

3.1 Raisonnement par l'absurde

Méthode 9 : *On veut démontrer qu'une propriété A est vraie. On suppose « non A », et on cherche à aboutir à une contradiction.*

Exemple 3.1 : Démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3.2 Raisonnement par récurrence

Méthode 10 (principe de récurrence) : *On veut démontrer une propriété du type « $\forall n \in [\![n_0\,;+\infty[\![$, $\mathcal{P}(n)$ », où n_0 est un entier fixé (le plus souvent 0 ou 1).*
Il suffit pour ceci de démontrer les deux propriétés suivantes :

- *Initialisation :* $\mathcal{P}(n_0)$
- *Hérédité :* $\forall n \in [\![n_0\,;+\infty[\![$, $[\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)]$

Rédaction :
Pour tout $n \in [\![n_0\,;+\infty[\![$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « (...) $\boxed{\textit{pas de } \forall n}$ ».
Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0\,;+\infty[\![$.
Initialisation : (...) donc $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
Hérédité : « Soit $n \in [\![n_0\,;+\infty[\![$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie (hypothèse de récurrence). »
ou une variante : « On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour **un** entier $n \geqslant n_0$ fixé. »

Attention ! *On ne suppose pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n, car c'est ce que l'on veut démontrer !!!*

Alors (...) donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0\,;+\infty[\![$.

Exemple 3.2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

Variante 1 : récurrence double (ou récurrence à deux pas)

- Initialisation : démontrer $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$
- Hérédité : On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ pour un entier $n \in [\![n_0\,;+\infty[\![$ fixé, et on démontre $\mathcal{P}(n+2)$.
- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0\,;+\infty[\![$.

Exemple 3.3 : Soit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $F_1 = F_2 = 1$, et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

Remarque : Cette variante se généralise pour un nombre quelconque de pas.

Variante 2 : récurrence forte

- Initialisation : démontrer $\mathcal{P}(n_0)$
- Hérédité : On suppose que, pour un entier $n \in [\![n_0\,;+\infty[\![$ fixé, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![n_0\,;n]\!]$, et on démontre $\mathcal{P}(n+1)$.
- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0\,;+\infty[\![$.

Exemple 3.4 : Montrer que tout entier supérieur à 2 admet un diviseur premier.

3.3 Raisonnement par analyse-synthèse

Méthode 11 : *On veut démontrer une propriété d'existence (éventuellement avec unicité). On commence par chercher des conditions nécessaires (phase d'analyse), puis on montre que ces conditions nécessaires sont suffisantes (phase de synthèse).*

Exemple 3.5 : Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Montrer que f peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

4 Relation d'équivalence

Définition 4.1 (relation binaire)

Soit E un ensemble.
Une relation binaire sur l'ensemble E est une propriété (pouvant être vraie ou fausse) dépendant de deux éléments de E.
Pour une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E et deux éléments x,y de E, on note $x\mathcal{R}y$ cette propriété.

Exemples 4.2 : Sur $\mathbb{R}$, on peut considérer les relations $=$, $\neq$, $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$.

Définition 4.3 (relation d'équivalence)

Soit E un ensemble.
Une relation d'équivalence sur E est une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E qui est :

1. réflexive : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$
2. symétrique : $\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$
3. transitive : $\forall (x,y,z) \in E^3,\ (\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z\ ) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$

Exemple 4.4 : La relation d'égalité sur n'importe quel ensemble est une relation d'équivalence.

Définition 4.5 (relation de congruence modulo un réel)

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On définit sur $\mathbb{R}$ une relation binaire en posant :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a \equiv b \ \ [x] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ a - b = kx$$

Cette relation binaire est appelée relation de congruence modulo x, et « $a \equiv b\ [x]$ » se lit « a est congru à b modulo x ».

Remarque : En trigonométrie, la relation de congruence la plus usitée est celle modulo 2π.

Proposition 4.6 (la relation de congruence est une relation d'équivalence)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation de congruence modulo x est une relation d'équivalence.

Proposition 4.7 (opérations algébriques sur les congruences)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $a \equiv b\ [x]$ et $c \equiv d\ [x]$.
On a :

- $a + c \equiv b + d\ [x]$
- $ac \equiv bd\ \ [x]$